

## Rozdział II

## TERMOMECHANIKA CIAŁ JEDNOSKŁADNIKOWYCH

**8. Wstęp do termodynamiki**

Omawianym poprzednio deformacjom ciała towarzyszy wydzielanie się ciepła. Odwrotnie, podgrzaniu towarzyszą deformacje a dalej naprężenia. Widać więc, iż zjawiska te należy wspólnie opisać do czego służą metody termodynamiki. W języku tej teorii ciało nazywamy układem, a jego dopełnienie otoczeniem. Jeżeli nie ma wymiany masy z otoczeniem to układ nazywamy zamkniętym, a jeżeli brak wymiany energii z otoczeniem to układ taki nazywamy izolowanym. W układzie izolowanym całkowita energia, czyli suma energii wewnętrznej  $U$  i kinetycznej  $K$  musi być zachowana, aczkolwiek może ulec przemianom. *Energią wewnętrzną* nazywać będziemy sumę różnych rodzajów energii jaką obdarowane są cząstki, jony i atomy tworzące układ. Są to energie kinetyczne ruchu postępowego, obrotowego i drgającego cząstek oraz energie potencjalne cząstek.

Podstawowym pojęciem w termodynamice klasycznej jest pojęcie równowagi. Otóż mówi się, że układ znajduje się w równowadze, jeżeli przestaje oddziaływać z otoczeniem. Przestają też oddziaływać wzajemnie ze sobą wszystkie podukłady w nim zawarte. Postuluje się przy tym, że każdy izolowany układ osiąga stan równowagi po dostatecznie długim czasie. Analizę tego dochodzenia do stanu równowagowego przedstawimy w opracowaniu.

Kolejnym pojęciem podstawowym jest stan układu, który określa zespół mierzalnych własności mających znaczenie przy analizie równowagi układu. Wśród tych wielkości jako zmienne stanu występują najczęściej gęstość  $\rho$ , objętość  $V$  i temperatura  $T$ . W rozważaniach naszych korzystać będziemy z pojęcia *temperatury absolutnej* (Kelwina)  $T > 0$ , która przyjmuje tylko dodatnie wartości.

**9. Termostatyka**

Z elementarnego ujęcia zasady zachowania energii wynika znana zależność

$$\Delta U + \Delta K = \Delta Q + \Delta W \quad (9.1)$$

stwierdzająca, iż suma zmian energii wewnętrznej  $U$  i kinetycznej  $K$  jest równa sumie zmian energii cieplnej  $Q$  i pracy mechanicznej  $W$ . Zależność ta w formie różniczkowej prowadzi do równości

$$d(U + K) = dQ + dW \quad (9.2)$$

lub

$$\dot{U} + \dot{K} = \dot{Q} + \dot{W} \quad (9.3)$$

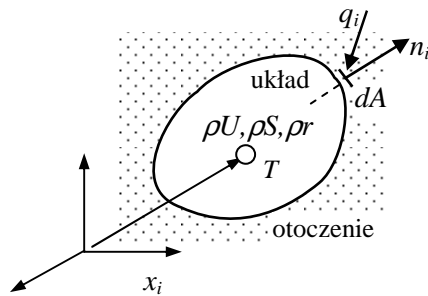
Drugą podstawową wielkością w rozważaniach energetycznych jest *entropia*  $S$ . Wprowadza się ją jako nową funkcję stanu określoną przez jej przyrost  $\Delta S$  w stanie równowagowym

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \quad (9.4)$$

lub w formie różniczkowej

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (9.5)$$

Podane tu relacje nie zawierają zmiennych przestrzennych. Dotyczą więc jedynie szczególnych zadań, dlatego w kolejnych rozważaniach analizujemy przepływ ciepła w ciele w wyniku jego produkcji  $\rho r$  i strumienia ciepła  $q_i$  dopływającego z otoczenia, które są funkcjami położenia i czasu. Uwzględniamy przy tym tylko wpływy cieplne pomijając mechaniczne.



Rys. 9.1. Przepływ energii z układu do otoczenia

Sumując energie po całym ośrodku otrzymamy

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho U_c dV = \int_V \rho r dV - \int_A q_i n_i dA \quad (9.6)$$

Po wykorzystaniu twierdzenia o dywergencji uzyskamy lokalny bilans energii

$$\rho \frac{dU_c}{dt} = \rho r - q_{i,i} \quad (9.7)$$

Zmiana energii wewnętrznej  $U_c$  w analizowanym procesie jest równa sumie źródła ciepła  $\rho r$  i dywergencji strumienia ciepła.

### 10. Energetyka procesów mechanicznych

Równania pierwszej i drugiej zasady termodynamiki uwzględniają łącznie zachodzące przemiany energetyczne związane co najmniej z przepływem ciepła oraz przemiany energetyczne wynikające z oddziaływań mechanicznych. Te ostatnie wydedukujemy z równań ruchu (6.3) mnożąc je skalarnie przez prędkość  $v_i$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} v_i = \rho F_i v_i + \sigma_{ij,j} v_i \quad (10.1)$$

oraz całkując po objętości ciała

$$\int_V \rho \frac{dv_i}{dt} v_i dV = \int_V [\rho F_i v_i + (\sigma_{ij} v_i)_{,j} - \sigma_{ij} v_{i,j}] dV \quad (10.2)$$

Korzystamy tu z wzorów

$$(\sigma_{ij} v_i)_{,j} = \sigma_{ij,j} v_i + \sigma_{ij} v_{i,j} \quad , \quad \sigma_{ij} n_j = P_i \quad (10.3)$$

oraz

$$\frac{d}{dt} \rho \frac{v_i v_i}{2} = \frac{1}{2} \rho \frac{dv_i}{dt} v_i + \frac{1}{2} \rho \frac{dv_i}{dt} v_i = \rho \frac{dv_i}{dt} v_i = \rho \frac{dk}{dt} \quad (10.4)$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} dV = \int_V (\rho F_i v_i - \sigma_{ij} d_{ij}) dV + \int_A \sigma_{ij} v_i n_j dA \quad (10.5)$$

oraz

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} dV + \int_V \sigma_{ij} d_{ij} dV = \int_V \rho F_i v_i dV + \int_A P_i v_i dA \quad (10.6)$$

Wynikająca z (10.6) równość (10.7)

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho (U_m + K) dV = \int_V \rho F_i v_i dV + \int_A P_i v_i dA, \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho U_m dV = \int_V \sigma_{ij} d_{ij} dV \quad (10.7)$$

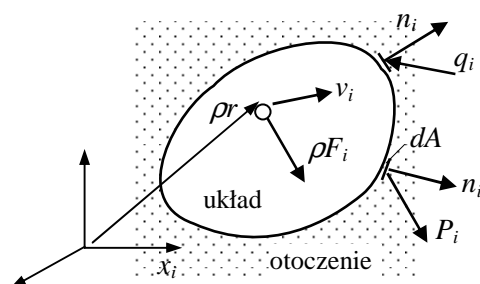
jest zasadą zachowania energii dla procesu mechanicznego.

### 11. Pierwsza zasada termodynamiki

Analizować będziemy teraz łącznie przemiany energetyczne wynikające z wpływów mechanicznych - sił  $\rho F_i$  i  $P_i$  oraz cieplnych - źródeł  $\rho r$  i strumienia ciepła  $q_i$ . Po zsumowaniu stronami równań ujmujących zasady zachowania energii dla procesów cieplnych i mechanicznych otrzymamy równość uwzględniającą łącznie oba procesy

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho (U + K) dV = \int_V (\rho r + \rho F_i v_i) dV + \int_A (P_i v_i - q_i n_i) dA \quad (11.1)$$

gdzie  $U = U_m + U_c$



Rys. 11.1. Oddziaływanie układu z otoczeniem

Zauważmy, że w równaniu tym możemy zidentyfikować człony występujące w klasycznym ujęciu tej zasady

$$\dot{U} + \dot{K} = \dot{Q} + \dot{W} \quad (11.2)$$

Istotnie, zachodzi

$$\dot{Q} = \int_V \rho r dV - \int_A q_i n_i dA, \quad \dot{W} = \int_V \rho F_i v_i dV + \int_A P_i v_i dA \quad (11.3)$$

W ten sposób dokonaliśmy uogólnienia klasycznego sformułowania pierwszej zasady termodynamiki z układu jednorodnego na przypadek ogólny, z wyraźnym podkreśleniem oddziaływania układu z otoczeniem.

## 12. Druga zasada termodynamiki

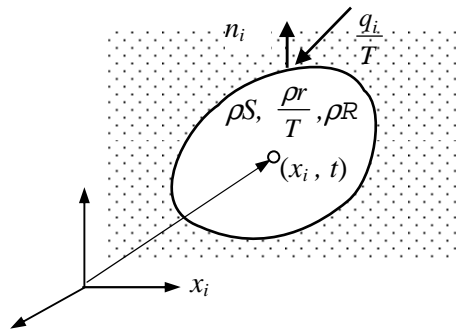
Zasada ta narzuca ograniczenia na kierunek procesów (przemian) termodynamicznych. Rozpatrywaną poprzednio różniczkę entropii

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (12.1)$$

zastąpimy bilansem źródeł i strumieni entropii

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho S dV = \int_V \frac{\rho r}{T} dV - \int_A \frac{q_i n_i}{T} dA \quad (12.2)$$

słusznym dla procesów równowagowych



Rys. 12.1. Wymiana entropii między układem a otoczeniem

W przypadku procesów nierównowagowych wystąpi dodatkowo *nieujemna wewnętrzna produkcja entropii* -  $\rho R \geq 0$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho S dV = \int_V \frac{\rho r}{T} dV - \int_A \frac{q_i n_i}{T} dA + \int_V \rho R dV \quad (12.3)$$

stąd w miejsce równości po pominięciu  $\rho R \geq 0$  otrzymamy nierówność wzrostu entropii

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho S dV \geq \int_V \frac{\rho r}{T} dV - \int_A \frac{q_i n_i}{T} dA, \quad \int_V \rho R dV \geq 0 \quad (12.4)$$

mającą podstawowe znaczenie w termodynamice.

### 13. Nierówność rezydualna

W wyniku przekształceń algebraicznych równań I i II zasady termodynamiki można uzyskać równoważną im nierówność, tzw. **nierówność rezydualną**, która powinna być spełniona w każdym realnym procesie termomechanicznym. Punktem wyjściowym tych rozważań są równania:

I zasady termodynamiki

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho (U + K) dV = \int_V (\rho r + \rho F_i v_i) dV + \int_A (P_i v_i - q_i n_i) dA \quad (13.1)$$

II zasady termodynamiki

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho S dV = \int_V \frac{\rho r}{T} dV - \int_A \frac{q_i n_i}{T} dA + \int_V \rho R dV \quad \int_V \rho R \geq 0 \quad (13.2)$$

Korzystając z równań ruchu, twierdzenia Gaussa o dywergencji oraz wprowadzając operację różniczkowania pod całką otrzymamy

$$\int_V \rho \left( \frac{dU}{dt} + v_i \frac{dv_i}{dt} \right) dV = \int_V \left( \rho r - q_{i,i} + \rho F_i v_i + (\sigma_{ij} v_i)_{,j} \right) dV \quad (13.3)$$

W wyniku przekształceń otrzymujemy zależność całkową

$$\int_V \left( -\rho \frac{dU}{dt} + \rho r - q_{i,i} + \sigma_{ij} d_{ij} \right) dV = 0 \quad (13.4)$$

Zanikanie funkcji podcałkowej prowadzi do lokalnej postaci bilansu energii

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho r - q_{i,i} + \sigma_{ij} d_{ij} \quad \text{gdzie} \quad 2d_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i} \quad (13.5)$$

Podobnie postąpimy z bilansem entropii

$$\int_V \left[ -\frac{d}{dt} \rho S + \frac{\rho r}{T} - \left( \frac{q_i}{T} \right)_{,i} + \rho R \right] dV = 0 \quad (13.6)$$

którego lokalna postać ma formę

$$\rho \frac{dS}{dt} = \frac{\rho r}{T} - \left( \frac{q_i}{T} \right)_{,i} + \rho R, \quad \rho R \geq 0 \quad (13.7)$$

Pominięcie składnika  $\rho R \geq 0$  w bilansie entropii prowadzi do nierówności

$$\rho \frac{dS}{dt} \geq \frac{\rho r}{T} - \frac{q_{i,i}}{T} + \frac{q_i T_{,i}}{T^2} \quad (13.8)$$

Eliminacja wspólnych składników  $\rho r - q_{i,i}$  z równań I i II zasady termodynamiki prowadzi do **nierówności rezydualnej**, która powinna być słuszna w każdym rzeczywistym procesie opisywanym w tym punkcie

$$-\rho \frac{dU}{dt} + T \rho \frac{dS}{dt} + \sigma_{ij} d_{ij} - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (13.9)$$

Nierówność ta wyznacza jednocześnie podstawowe ograniczenia nakładane przez energetykę na równania konstytutywne procesu.

#### 14. Linearyzacja równań bilansów

Występująca w bilansie energii pochodna  $\rho \frac{dU}{dt}$  prowadzi do równania

$$\rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} + w_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) = \rho r - q_{i,i} + \sigma_{ij} d_{ij} \quad (14.1)$$

a po linearyzacji, czyli pominięciu składowej konwekcyjnej  $w_i \frac{\partial U}{\partial x_i}$  otrzymamy

$$\rho \dot{U} = \rho r - q_{i,i} + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (14.1')$$

W ogólnym przypadku przy obliczaniu pochodnych po czasie  $\rho \frac{dU}{dt}$  wystąpią w niej dwie składowe:

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

$\swarrow$                        $\searrow$   
 - lokalna            i            konwekcyjna

Składowa konwekcyjna wprowadza nieliniowość i z tej przyczyny jest bardzo często pomijalna. Tak też postąpimy w naszym opracowaniu, pomijając na ogół składowe konwekcyjne we wszystkich lokalnych równaniach bilansów termomechaniki. Zachodzi

$$\begin{aligned} \frac{du_k}{dt} &\approx \dot{u}_k & 2d_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i} &\approx 2\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} \\ \rho \frac{dU}{dt} &\approx \rho \dot{U} & \frac{dS}{dt} &\approx \dot{S} \end{aligned} \quad (14.2)$$

### 15. Równania konstytutywne

W termodynamice gazów i cieczy energia wewnętrzna jest zależna od zmian objętości  $V$  i entropii  $S$

$$U = U(V, S) \quad (15.1)$$

stąd jej różniczka ma formę

$$dU = \frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial S} dS \quad (15.2)$$

Natomiast w zagadnieniach termomechaniki ciała stałego w miejsce zmian objętości  $V$  wprowadzimy tensor odkształceń  $\epsilon_{ij}$ . Wtedy energia wewnętrzna  $\rho U$  przyjmie postać

$$U = U(\epsilon_{ij}, S) \quad (15.3)$$



a jej pełna pochodna po czasie wynosi

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial S} \frac{dS}{dt} \quad (15.4)$$

$$2d_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i} = \frac{d}{dt}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{d}{dt} 2\varepsilon_{ij}$$

Po uwzględnieniu powyższego zapisu podstawowa dla rozważań termomechanicznych nierówność rezydualna przyjmie formę

$$-\rho \frac{\partial U}{\partial S} \frac{dS}{dt} + \rho \frac{dS}{dt} T - \rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (15.5)$$

Po uporządkowaniu tej nierówności i przyjęciu, iż powinna być ona spełniona dla każdej realnej zmiany *entropii*  $\dot{S}$  i zmian *odkształceń*  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  otrzymamy

$$(T - \frac{\partial U}{\partial S}) \rho \frac{dS}{dt} + (\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}) \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (15.6)$$

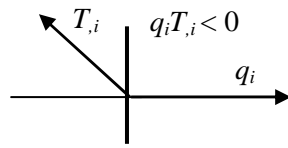
Wobec niezależności (15.6) od  $S$  i  $\varepsilon_{ij}$  otrzymamy równania fizyczne określające *temperaturę*  $T$  i *naprężenie*  $\sigma_{ij}$  w ciele sprężystym

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (15.7)$$

oraz nierówność, która jest ograniczeniem na postać *strumienia ciepła*

$$-\frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0 \Rightarrow -q_i T_{,i} \geq 0, \quad \text{stąd} \quad q_i = -\lambda T_{,i}, \quad \lambda > 0 \quad (15.8)$$

Z nierówności tej wynika, iż strumień  $q_i$  jest przeciwnie skierowany do gradientu temperatury  $T_{,i}$ , tak, że ich iloczyn skalarny jest ujemny.



Rys. 15.1 Współzależność gradientu temperatury i strumienia ciepła

Jest to podstawowe ograniczenie dla przepływów ciepła.

## 16. Potencjały termodynamiczne

W termomechanice oprócz energii wewnętrznej

$$U = U(S, \varepsilon_{ij}) \quad (16.1)$$

korzysta się z *energii swobodnej* – (funkcji Helmholtza)  $\rho A$ , którą z energią wewnętrzną łączy relacja

$$\rho A = \rho U - \rho S T \quad (16.2)$$

Jej pochodna wynosi

$$\rho \dot{A} = \rho \dot{U} - \rho \dot{S} T - \rho S \dot{T}$$

stąd

$$-\rho \dot{U} = -\rho \dot{A} - \rho \dot{S} T - \rho S \dot{T}$$

Podstawiając ten wynik do nierówności rezydualnej otrzymamy

$$-\rho \dot{A} - \rho \dot{S} T + \sigma_{ij} d_{ij} - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (16.3)$$

Natomiast w ogólnym przypadku, przy uwzględnieniu pełnych pochodnych czasowych, będzie zachodziło

$$-\rho \frac{dA}{dt} - \rho S \frac{dT}{dt} + \sigma_{ij} d_{ij} - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (16.3')$$

Powyższe nierówności są odpowiednikami poprzednio przytoczonej nierówności rezydualnej (13.9). Zakładamy, że w tych rozważaniach energia swobodna  $A = A(T, \varepsilon_{ij})$  jest funkcją temperatury i odkształceń.

Oprócz energii wewnętrznej i swobodnej wprowadzimy jeszcze parę bardzo użytecznych potencjałów termodynamicznych, a mianowicie *entalpię*  $\rho H$  i *entalpię swobodną*  $\rho G$ .

*Entalpię*  $\rho H = \rho H(S, \sigma_{ij})$  z energią wewnętrzną łączy równanie

$$\rho H = \rho U - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (16.4)$$

a pochodne są powiązane relacją

$$-\rho \dot{U} = -\rho \dot{H} - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}$$

stąd nierówność rezydualna przyjmie formę

$$-\rho \dot{H} - \rho \dot{S} T + \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0$$

*Entalpię swobodną*  $\rho G$  z energią wewnętrzną łączy relacja

$$\rho G = \rho U - \rho S T - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (16.5)$$

z której wyliczymy pochodną  $\rho \dot{G}$

$$-\rho \dot{U} = -\rho \dot{G} - \rho \dot{S} T - \rho S \dot{T} - \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$$

którą podstawimy do wyjściowej nierówności rezydualnej, gdzie występuje pochodna energii wewnętrznej  $\rho \dot{U}$ .

Dla *entalpii swobodnej* słuszna jest nierówność rezydualna

$$-\rho \dot{G} - \rho S \dot{T} + \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (16.6)$$

Występująca w tej nierówności entalpia swobodna ma formę

$$\rho G = \rho G(T, \sigma_{ij}) \quad (16.7)$$

Oczywiście o ich wykorzystaniu decyduje konkretny proces zmian energii w ciele, który może być w różny sposób opisany.

Obliczając pochodną po czasie potencjału  $\rho\dot{G}$  otrzymamy

$$\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}$$

Wprowadzając pochodną  $\rho\dot{G}$  do nierówności rezydualnej uzyskamy

$$-\left( \rho \frac{\partial G}{\partial T} + \rho S \right) \dot{T} - \left( \rho \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} + \varepsilon_{ij} \right) \dot{\sigma}_{ij} - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (16.8)$$

Wymagając z kolei, aby nierówność ta była słuszna dla każdego wyboru temperatury  $T$  i naprężeń  $\sigma_{ij}$ , otrzymamy równania konstytutywne

$$\varepsilon_{ij} = -\rho \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad , \quad S = -\frac{\partial G}{\partial T} \quad (16.9)$$

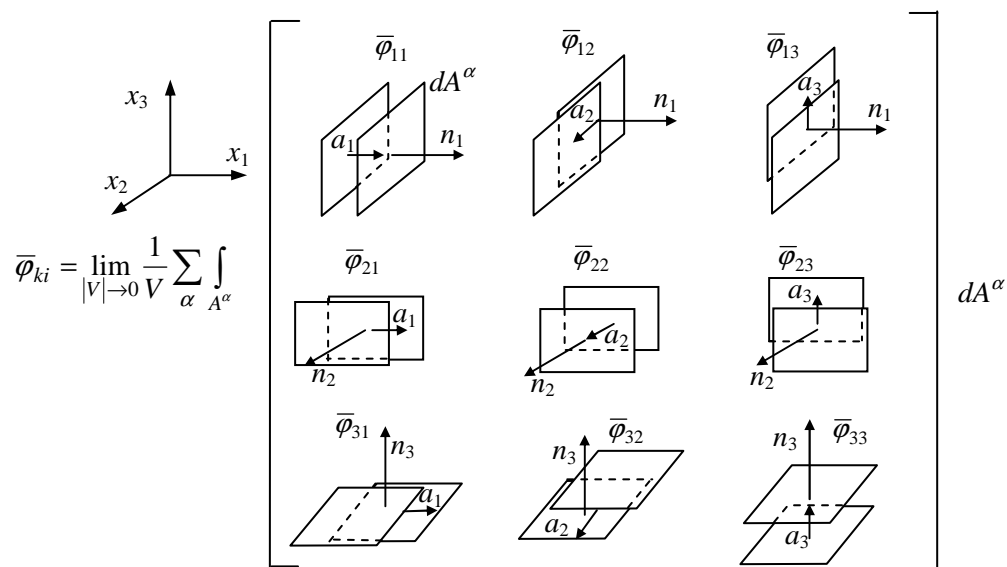
oraz ograniczenie  $-q_i T_{,i} \geq 0$  na strumień ciepła.

Równania I i II zasady termodynamiki prowadzą do nierówności rezydualnej, w której występuje zmiana energii wewnętrznej oraz zmiany natury cieplnej i mechanicznej z tym, że zmiana energii wewnętrznej spowodowana jest zmianą entropii i odkształceniem. Jest to sytuacja o tyle niekorzystna, że entropia jest wielkością trudną do zmierzenia, dlatego też wygodniej wprowadzić energię swobodną, która będzie zależna od temperatury i odkształceń. Podobnie można wprowadzić entalpię swobodną jako potencjał termodynamiczny zależny od temperatury i naprężeń oraz entalpię zależną od entropii i naprężeń. Wyszczególnione tu cztery potencjały termodynamiczne  $\rho U$ ,  $\rho A$ ,  $\rho H$  i  $\rho G$  stanowią podstawę klasycznych rozważań termodynamiki.

## 17. Mikrouszkodzenia struktury materiału

W trakcie eksploatacji konstrukcji dochodzi w nich do rozwoju najpierw drobnych mikrospekkań, które finalnie kończą się makrospekkaniami. Powstające mikrouszkodzenia prowadzą do nieciągłości ośrodka, które chcemy opisywać stosując klasyczny aparat pojęciowy mechaniki continuum. Wymaga to wprowadzenia do opisu procesu nowego pola tensorowego ujmującego narastanie nieciągłości materiału. Proces ten będziemy obecnie opisywać.

Powstające w materiale *mikropęknięcie* ( $\alpha$ ) ujmuje jego powierzchnia  $A^\alpha$ , wektor normalnej do niej  $n_i^\alpha$  oraz wektor rozwarcia  $a_k^\alpha$ . Do opisu tego procesu wygodnie jest wprowadzić pole tensorowe  $\varphi_{ki}$



Rys. 17.1. Współrzędne tensora mikrouszkodzeń  $\bar{\varphi}_{ki}$

$$\bar{\varphi}_{ki} = \lim_{|V| \rightarrow 0} \frac{1}{V} \sum_{\alpha} \int_{A^\alpha} a_k^\alpha n_i^\alpha dA^\alpha \quad (17.1)$$

które może być miarą narastania mikropęknięć w ciele. Dla prostoty rozważań przyjmuje się symetryczny tensor mikrouszkodzeń

$$\varphi_{ki} = \frac{1}{2} (\bar{\varphi}_{ki} + \bar{\varphi}_{ik}) \quad (17.2)$$

Proces narastania mikrouszkodzeń wpływa na formy dyssypacji energii z układu oraz w sposób pośredni na stan energetyczny materiału. Można więc stwierdzić, że potencjały termodynamiczne będą dodatkowo zależeć również od tensora mikropęknięć  $\varphi_{ki}$  jako dodatkowego pola.

$$\begin{aligned} G &= G(T, \sigma_{ij}; \varphi_{ij}) \\ A &= A(T, \varepsilon_{ij}; \varphi_{ij}) \end{aligned} \quad (17.3)$$

Fakt ten wprowadzi istotne zmiany w naszych rozważaniach, ponieważ pojawi się nowa zmienna  $\varphi_{ij}$  - jako tzw. *parametr wewnętrzny*, od którego będą zależne potencjały termodynamiczne.

Równania fizyczne dla ciała *sprężysto - kruche* z uwzględnieniem wpływu temperatury i mikrospektań uzyskamy obliczając pochodną  $\rho \dot{A}$

$$-\dot{A} = -\frac{\partial A}{\partial T} \dot{T} - \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial A}{\partial \varphi_{ij}} \dot{\varphi}_{ij} \quad (17.4)$$

oraz wstawiając ją do nierówności rezydualnej

$$-\rho \frac{\partial A}{\partial T} \dot{T} - \rho S \dot{T} - \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \frac{\partial A}{\partial \varphi_{ij}} \dot{\varphi}_{ij} - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (17.5)$$

$$-\rho \left( \frac{\partial A}{\partial T} + S \right) \dot{T} + \left( \sigma_{ij} - \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \frac{\partial A}{\partial \varphi_{ij}} \dot{\varphi}_{ij} - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (17.5')$$

Jeżeli analizowany proces jest słuszny dla każdego przyrostu temperatury i odkształceń, to uzyskamy równania konstytutywne w ciele sprężystym

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad , \quad S = -\frac{\partial A}{\partial T} \quad (17.6)$$

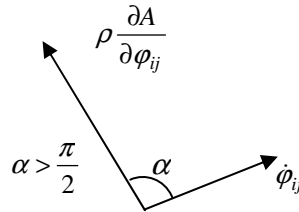
oraz nierówność z pozostałych składników

$$-\rho \frac{\partial A}{\partial \varphi_{ij}} \dot{\varphi}_{ij} - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (17.7)$$

W szczególności, gdy  $T_{,i} = 0$  zachodzi ograniczenie dla narastania mikrouszkodzeń  $\varphi_{ij}$

$$-\rho \frac{\partial A}{\partial \varphi_{ij}} \dot{\varphi}_{ij} \geq 0 \quad (17.8)$$

Wynika stąd, że zmiana energii swobodnej  $\rho A$  wywołana procesem mikrospełkań, przy  $\dot{\varphi}_{ij} > 0$  musi być ujemna lub równa zero, kiedy proces zanika. Nierówność ta stanowi podstawowe ograniczenie energetyczne dla rozwoju mikrouszkodzeń struktury materiału



Rys. 17.2. Współzależność między tensorem mikrouszkodzeń a zmianą energii swobodnej  $\rho \frac{\partial A}{\partial \varphi_{ij}}$

Podane rozumowanie prowadzące do stwierdzenia, że iloczyn  $\rho \frac{\partial A}{\partial \varphi_{ij}}$  i  $\dot{\varphi}_{ij}$  muszą być przeciwnie skierowane nie jest jedyne. Możemy bowiem założyć, iż tensor prędkości mikrouszkodzeń  $\dot{\varphi}_{ij}$  będzie zależny od pól odkształceń  $\varepsilon_{ij}$  i temperatury  $T$ , czyli

$$\dot{\varphi}_{ij} = k_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} + v_{ij} \dot{T} \quad (17.9)$$

a stąd

$$-\rho \frac{\partial A}{\partial \varphi_{ij}} \dot{\varphi}_{ij} = -\rho \frac{\partial A}{\partial \varphi_{ij}} (k_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} + v_{ij} \dot{T})$$

Podstawiając uzyskany wynik do nierówności rezydualnej otrzymamy

$$-\rho \left( \frac{\partial A}{\partial T} + S \right) \dot{T} + \left( \sigma_{ij} - \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \frac{\partial A}{\partial \varphi_{ij}} k_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \rho \frac{\partial A}{\partial \varphi_{ij}} v_{ij} \dot{T} - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (17.10)$$

Po uporządkowaniu tej nierówności względem zmiennych niezależnych  $\varepsilon_{ij}$  i  $T$  i założeniu symetrii tensora  $k_{klj} = k_{ijl}$  otrzymamy nierówność

$$-\rho\left(\frac{\partial A}{\partial T} + S + \frac{\partial A}{\partial \varphi_{ij}} v_{ij}\right) \dot{T} + (\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} - \rho \frac{\partial A}{\partial \varphi_{kl}} k_{klj}) \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (17.11)$$

Spełnienie, jak poprzednio wymogu niezależności tej nierówności od każdej realnej zmiany  $\varepsilon_{ij}$  i  $T$  prowadzi wprost do nowego układu równań fizycznych procesu

$$S = -\frac{\partial A}{\partial T} - \frac{\partial A}{\partial \varphi_{ij}} v_{ij} \quad , \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} + \rho \frac{\partial A}{\partial \varphi_{kl}} k_{klj} \quad (17.12)$$

i tradycyjnej nierówności określającej kierunek przepływu ciepła  $-q_i T_{,i} \geq 0$

Otrzymaliśmy więc równania fizyczne dla ciała sprężystego z uwzględnieniem narastania mikrospekłań, które nie wywołują dyssypacji energii w trakcie procesu.

W szczególności zaś, jeżeli  $T_{,i} = 0$  i  $\dot{T} = 0$  w procesie izotermicznym mamy proste równanie określające tensor naprężeń  $\sigma_{ij}$  z uwzględnieniem mikrospekłań

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} + \rho \frac{\partial A}{\partial \varphi_{kl}} k_{klj}$$

Rozważany przypadek narastania uszkodzeń w ciele sprężystym należy traktować jako krańcową idealizację rzeczywistości.

## 18. Liniowa teoria uszkodzeń

Sprecyzujemy obecnie najprostszą liniową postać równań konstytutywnych w ciele sprężystym, w którym narastają uszkodzenia struktury oraz występuje przepływ ciepła.

Przyjmujemy tu podstawowy potencjał - energię swobodną  $\rho A$  jako sumę formy liniowej i kwadratowej zależnej od  $T, \varepsilon_{ij}$  i  $\varphi_{ij}$ .



$$\rho A = \rho A(T, \varepsilon_{ij}, \varphi_{ij}) = A_0 + aT + a_{ij}\varepsilon_{ij} + b_{ij}\varphi_{ij} + AT^2 + A_{ij}\varepsilon_{ij}T + B_{ij}\varphi_{ij}T + \frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + F_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varphi_{kl} + \frac{1}{2}G_{ijkl}\varphi_{ij}\varphi_{kl} \quad (18.1)$$

Określając energię swobodną  $\rho A$  należy „stałe”  $a, a_{ij}, b_{ij}, A, A_{ij}, \dots, G_{ijkl}$  wyznaczyć z eksperymentu.

Po wyliczeniu pochodnej  $\rho \dot{A}$ , podstawieniu do nierówności rezydualnej otrzymamy równania fizyczne

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} + \rho \frac{\partial A}{\partial \varphi_{kl}} k_{kl ij} = (a_{ij} + A_{ij}T + E_{ijrs}\varepsilon_{rs} + F_{ijkl}\varphi_{kl}) + k_{ijkl}(b_{kl} + B_{ij}T + F_{rskl}\varepsilon_{rs} + G_{rskl}\varphi_{rs}) \quad (18.2)$$

stąd

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0 = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \rho k_{kl ij} F_{rskl}\varepsilon_{rs} + F_{ijkl}\varphi_{kl} + \rho k_{kl ij} G_{rskl}\varphi_{rs} + A_{ij}T + \rho k_{kl ij} B_{kl}T \quad (18.3)$$

gdzie  $\sigma_{ij}^0 = a_{ij} + k_{ijkl}b_{kl}$  są naprężeniami wstępnymi

Po uporządkowaniu równania na tensor naprężeń i wprowadzeniu tensorów materiałowych  $e_{ijrs}, f_{ijrs}$  i  $a_{ij}$  otrzymamy

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0 = e_{ijrs}\varepsilon_{rs} + f_{ijrs}\varphi_{rs} + a_{ij}T \quad (18.3')$$

W przypadku szczególnym – materiału izotropowego należy w miejsce tensorów  $e_{ijrs}, f_{ijrs}$  i  $a_{ij}$  wprowadzić ich odpowiedniki izotropowe, np.

$$e_{ijrs} = \alpha_1 \delta_{ij} \delta_{rs} + \alpha_2 \delta_{ir} \delta_{js} + \alpha_3 \delta_{is} \delta_{jr}$$

Ostatecznie dla ciała izotropowego z uszkodzeniami otrzymamy następujące równanie fizyczne przy pominięciu naprężeń wstępnych  $\sigma_{ij}^0 \approx 0$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2a\varphi_{ij} + b\varphi_{kk}\delta_{ij} + \gamma T\delta_{ij} \quad (18.4)$$

gdzie

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T, \quad 2a = a_2 + a_3, \quad b = a_1$$

Zauważmy, iż równanie to jest sumą klasycznych składników jak w przypadku liniowo- sprężystym i członów pochodzących od tensora uszkodzeń  $\varphi_{ij}$ . Równania tego typu opisują mocno wyidealizowany przypadek graniczny.

Analogiczne rozważania należałoby przeprowadzić określając entropię  $\rho S$  w procesie oraz strumień ciepła  $q_i$ .

### 19. Termomechanika plastyczności

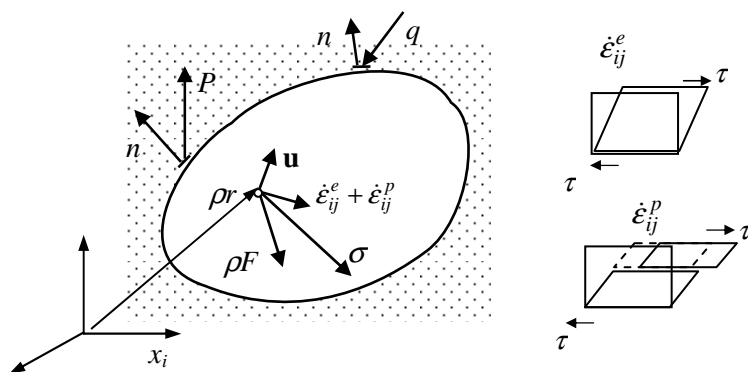
Plastyczne płynięcie ciał stałych ujmuje następujący układ lokalnych bilansów masy ( $\rho = const$ ), pędu i energii

$$\rho \dot{v}_i = \rho F_i + \sigma_{ij,j} \quad (19.1)$$

$$\rho \dot{U} = \rho r - q_{i,i} + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (19.2)$$

Analizować będziemy też nierówność wzrostu entropii

$$\rho \dot{S} \geq \frac{\rho r}{T} - (q_i)_i \quad (19.3)$$



Rys. 19.1. Odkształcenie plastyczne w ośrodku

Wynikające z podanych bilansów nierówności rezydualne mają formę

$$-\rho \dot{U} + \rho \dot{S} T + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (19.4)$$

$$-\rho\dot{A} - \rho S\dot{T} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (19.4')$$

Układ tych bilansów jest taki sam jak w klasycznych zadaniach mechaniki. Różnica pojawia się w równaniach tworzących, gdzie należy uwzględnić **nieodwracalność** procesu wynikającego z deformacji plastycznych. Własności te opiszemy poprzez rozdzielanie mocy mechanicznej na części: sprężyste (odwracalne) i plastyczne, które się dyssypują w procesie

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \sigma_{ij}(\dot{\varepsilon}_{ij}^e) + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (19.5)$$

a.) W opisach plastyczności *energii swobodną* przyjmiemy się w postaci

$$\rho A = \rho A^e(\varepsilon_{ij}^e, \Theta) + \rho A^p(\alpha_{ij}, \Theta) \quad \Theta = T - T_0 \quad (19.6)$$

Obliczając pochodną  $\rho A = \rho A^e + \rho A^p$

$$\rho\dot{A} = \rho \left( \frac{\partial A^e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\partial A^e}{\partial \Theta} \dot{\Theta} \right) + \rho \frac{\partial A^p}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} + \rho \frac{\partial A^p}{\partial \Theta} \dot{\Theta} \quad (19.7)$$

i wstawiając do nierówności rezydualnej otrzymamy

$$\left( -\rho \frac{\partial(A^e + A^p)}{\partial \Theta} - \rho S \right) \dot{\Theta} + \left( \sigma_{ij} - \rho \frac{\partial A^e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \left( -\rho \frac{\partial A^p}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} - \frac{q_i \Theta_{,i}}{T_0} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right) \geq 0 \quad (19.8)$$

Postępując podobnie jak poprzednio otrzymamy równania tworzące

$$S = -\frac{\partial A}{\partial \Theta} \quad \sigma_{ij}^0 = \rho \frac{\partial A^e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad (19.9)$$

określając entropię  $\rho S$  oraz naprężenia  $\sigma_{ij}$ .

Natomiast składniki związane z *parametrem wewnętrznym*  $\alpha_{ij}$ , mocą plastyczną  $\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  i strumieniem  $q_i$  wyznaczają dyssypację w procesie

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial A^p}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} - \frac{q_i \Theta_{,i}}{T_0} \geq 0 \quad (19.10)$$

b.) Termodynamika procesów nieodwracalnych daje nam ogólne ograniczenie co do przebiegu procesów plastycznych np. nieujemności sumy wszystkich trzech składowych procesów dyssypacyjnych w (19.10)

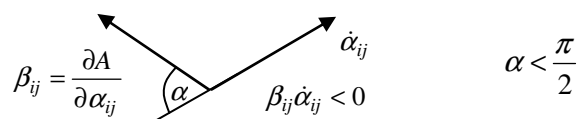
Występują tu następujące procesy szczególne:

I – przepływy ciepła, przy ustalonych odkształceniach plastycznych i parametrze wewnętrznym  $\alpha_{ij}$

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_{ij}^p = const \\ \alpha_{ij} = const \end{array} \right\} \rightarrow \text{zachodzi} \quad -q_i \Theta_{,i} \geq 0 \quad (19.11)$$

II – zmiany struktury materiału bez przepływów ciepła i zmian  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_{ij}^p = const \\ \Theta_{,i} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{zachodzi} \quad -\frac{\partial A}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} \geq 0 \quad (19.12)$$



Rys. 19.2. Współzależność parametru wewnętrznego  $\alpha_{ij}$  od  $\beta_{ij}$

III - izotermiczne płynięcie plastyczne bez zmian w strukturze materiału

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{ij} = const \\ \Theta_{,i} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{to} \quad \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (19.13)$$

Oczywiście, w rzeczywistości wyszczególnione procesy dyssypacyjne występują łącznie.

c.) Analizując szczególny przypadek, gdy  $\alpha_{ij} \equiv \text{const}$   $\Theta_{,j} = 0$  stwierdzamy, że

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (19.14)$$

Ponadto na odkształcenia plastyczne nie ma wpływu ciśnienie hydrostatyczne, a decyduje o nim tylko *dekwator stanu naprężenia*  $s_{ij}$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

Biorąc pod uwagę przytoczone ograniczenia uzyskamy nierówność dla mocy plastycznej

$$s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (19.15)$$

Nierówność tą spełnimy jeżeli  $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda s_{ij}$  i  $\lambda > 0$ . Istotnie,  $\lambda s_{ij} s_{ij} \geq 0$  dla  $\lambda > 0$ .

W teorii plastycznego płynięcia wprowadza się potencjał plastyczny  $G(s_{ij})$ , tak że zachodzi  $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial G}{\partial s_{ij}}$  czyli  $\lambda \frac{\partial G}{\partial s_{ij}} s_{ij} \geq 0$ . Jeżeli potencjał  $G$  pokrywa się z warunkiem plastyczności  $F$ , tj.  $G = F$ , np. w przypadku klasycznego warunku Hubera–Misesa–Hencky'ego – H–M–H:  $F = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - k^2 = 0$  to

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}},$$

gdzie  $\lambda = \frac{1}{k} (II_s)^{1/2}$ ,  $II_s = s_{ij} s_{ij}$ ,  $k$  - granica plastyczności

Biorąc pod uwagę rozkład odkształceń

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^T \quad (19.16)$$

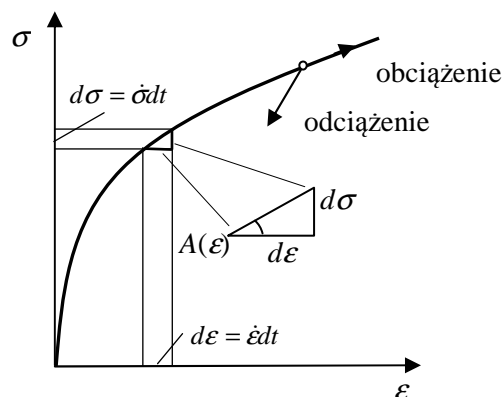
otrzymamy równania tworzące plastyczności

$$\dot{\epsilon}_{ij} = F_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \alpha_{ij} \dot{\Theta} \quad (19.17)$$

Ze struktury równań teorii plastycznego płynięcia wynika, iż zawierają one element liniowy oraz nieliniowy związany z prędkością odkształceń plastycznych. Składnik nieliniowy decyduje o złożoności obliczeń w teorii plastyczności.

d.) *Przyrostowa forma równań teorii plastyczności*

W zastosowaniach inżynierskich teorii plastyczności korzysta się najczęściej z przyrostowego ujęcia tej teorii. Ta forma jest poręczna w obliczeniach komputerowych.



Rys. 19.3. Przyrostowa forma równań konstytutywnych

Zauważmy, że o ile na całym obszarze odkształceń relacja  $\sigma - \varepsilon$  jest nieliniowa, to na przyrostach  $d\sigma$  i  $d\varepsilon$  jest ona liniowa, czyli

$$d\sigma = A^\varepsilon d\varepsilon \quad (19.18)$$

przy czym moduł styczny  $A$  jest zmienny i zależy od charakteru procesu oraz  $\varepsilon$ .

Uogólniając te równania na przypadek przestrzennego stanu naprężeń otrzymamy

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\varepsilon_{rs\dots})d\varepsilon_{kl}^e$$

gdzie

$$d\varepsilon_{kl} = d\varepsilon_{kl}^e + d\varepsilon_{kl}^p + d\varepsilon_{kl}^T$$

stąd

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\dots)d(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p - \varepsilon_{kl}^T) \quad (19.19)$$

Uzyskaliśmy tu dogodną do obliczeń numerycznych formę równań teorii plastyczności.

## 20. Wewnętrzna produkcja entropii

W zastosowaniach termomechaniki, które prowadzą do opisów takich typowych dla inżynierii procesów jak skurcz i pęcznienie materiału, wpływ przemian fazowych, utraty trwałości materiału, procesy korozji – należy sprecyzować *mechanizmy dysypatywne*.

Chcąc je poznać rozpoczniemy przede wszystkim analizę wewnętrznego źródła entropii  $\rho R$  występującego w lokalnym bilansie entropii

$$\rho \frac{dS}{dt} = \frac{\rho r}{T} - \left( \frac{q_i}{T} \right)_{,i} + \rho R \quad (20.1)$$

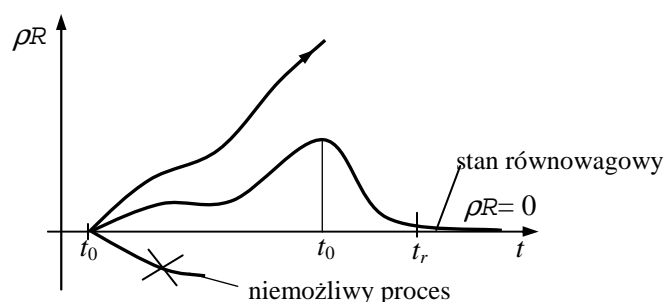
Są tu możliwe następujące sytuacje

$\rho R > 0$  – proces nieodwracalny

$\rho R = 0$  – stan równowagowy

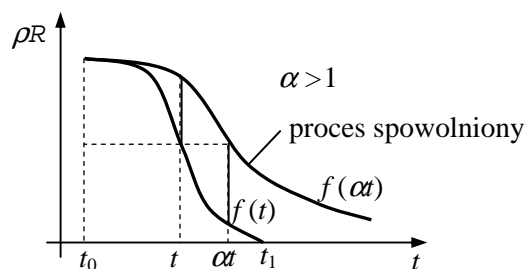
$\rho R < 0$  – nie istnieje!!!

Wśród procesów nierównowagowych istnieje szczególna grupa, kiedy to układ po wytrąceniu ze stanu równowagowego wraca do równowagi na innym poziomie energii. Przykładem mogą być procesy pełzania i relaksacji.



Rys. 20.1. Wewnętrzna produkcja entropii

Zajmiemy się obecnie tą klasą procesów termodynamicznych. Posiadają one istotną rolę przy opisach procesów technologicznych. Aby je analizować należy badać procesy termomechaniczne, których źródło wewnętrznej produkcji entropii od pewnej chwili  $t_0$  maleje, a w szczególności zanika



Rys. 20.2. Wewnętrzna produkcja entropii w układzie zmierzającym do równowagi

Najpierw analizujemy układ, który zdąża do stanu równowagi, czyli występuje w nim wewnętrzna produkcja  $\rho R = f(t)$  i  $\rho R < 0$ .

Prześledzimy teraz proces *spowolniony* do poprzedniego czyli taki, w którym czas przechodzi z  $t$  na  $\alpha \cdot t$  ( $t \rightarrow \alpha t$  i  $\alpha > 1$ ).

Oznacza to, iż taka sama wartość wewnętrznej produkcji entropii wystąpi w nim w czasie  $t' = \alpha t$ .

Dla obu wyszczególnionych procesów wypisujemy bilanse entropii:

$$\rho \dot{S}(t) = \frac{\rho r(t)}{T} - \left( \frac{q_i(t)}{T} \right)_{,i} + \rho R(t) \quad \text{- proces wyjściowy} \quad (20.2)$$

$$\rho \dot{S}(\alpha t) = \frac{\rho r(\alpha t)}{T(\alpha t)} - \left( \frac{q_i(\alpha t)}{T(\alpha t)} \right)_{,i} + \rho R(\alpha t) \quad \text{- proces spowolniony}$$

Symetryzując oba te procesy, tj. mnożąc pierwsze równanie przez  $R(\alpha t)$  zaś drugi przez  $R(t)$  otrzymujemy

$$\left( \rho \dot{S}(t) - \frac{\rho r(t)}{T} + \left( \frac{q_i(t)}{T} \right)_{,i} \right) R(\alpha t) = \rho R(t) R(\alpha t) \quad (20.3)$$

$$\left( \rho \dot{S}(\alpha t) - \frac{\rho r(\alpha t)}{T} + \left( \frac{q_i(\alpha t)}{T(\alpha t)} \right)_{,i} \right) R(t) = \rho R(\alpha t) R(t)$$

Relacje symetrii dla procesu o *zanikającej dyssypacji*  $\rho R$  mają formę



$$\left[ \rho \dot{S}(t) - \frac{\rho r(t)}{T} + \left( \frac{q_i(t)}{T(t)} \right)_{,i} \right] R(\alpha) - \left[ \rho \dot{S}(\alpha) - \frac{\rho r(\alpha)}{T(\alpha)} + \left( \frac{q_i(\alpha)}{T(\alpha)} \right)_{,i} \right] R(t) = 0$$

lub (20.4)

$$\left[ \rho \dot{S}(t) - \frac{\rho r(t)}{T} + \left( \frac{q_i(t)}{T(t)} \right)_{,i} \right] \frac{R(\alpha)}{R(t)} - \left[ \rho \dot{S}(\alpha) - \frac{\rho r(\alpha)}{T(\alpha)} + \left( \frac{q_i(\alpha)}{T(\alpha)} \right)_{,i} \right] = 0$$

Zauważmy, iż dla zanikającej dyssypacji zachodzi  $\frac{R(\alpha)}{R(t)} \geq 1$ .

Otrzymamy stąd nierówność

$$\rho [\dot{S}(\alpha) - \dot{S}(t)] - \rho \left[ \frac{r(\alpha)}{T(\alpha)} - \frac{r(t)}{T(t)} \right] + \left[ \frac{q_i(\alpha)}{T(\alpha)} - \frac{q_i(t)}{T(t)} \right]_{,i} \geq 0 \quad (20.5)$$

która stanowi ograniczenie dla *procesu zmierzającego do stanu równowagowego*.

Analizowaliśmy tu dwa procesy termodynamiczne zdążające do stanu równowagi:- w jednym  $\rho R$  jest ciągłą i zanikającą funkcją czasu, natomiast drugi proces jest spowolnieniem pierwszego. Z porównania obu procesów wynika nowa nierówność, która określa nam w jaki sposób układ będzie dążył do stanu równowagowego.

Z otrzymanej nierówności wynikają ograniczenia termodynamiczne dla ważnej klasy procesów nierównowagowych w technologiach wytwarzania, a mianowicie takich w których *stany nierównowagowe kończą się stanem równowagowym* na innym poziomie energetycznym.

### Zagadnienia

1. Podać bilanse energii osobno dla warstwy przypowierzchniowej i objętościowej.

2. Napisać warunki wymiany energii między obu częściami (tj. powierzchnią a objętością)

3. Podać szczególną postać zasady zachowania energii (11.1), kiedy ośrodek jest półprzestrzenią  $x_3 \geq 0$  i nie oddziałuje z otoczeniem  $x_3 < 0$ . Natomiast pola występujące w (11.1) są tylko funkcjami zmiennych  $(x_3, t)$ .

4. Podać szczególną postać zasady zachowania energii (11.1) dla warstwy ograniczonej powierzchniami  $|x_3| < h$ , przy braku źródła ciepła  $\rho r$ , zaś na powierzchniach  $x_3 = \pm h$  występują strumienie ciepła  $q_{i+}$ ,  $(q_{i+}n_{i+})$  i  $q_{i(-)}$ ,  $(q_{i(-)}n_{i(-)})$  spełniające warunek  $q_{i+}n_{i+} + q_{i(-)}n_{i(-)} = 0$ .

5. Przeanalizować drugą zasadę termodynamiki (12.3) w przypadku, kiedy wewnętrzna produkcja entropii  $\rho R$  określona jest zależnością  $\rho(R - R_0) = \rho R_0 \sin(\omega t)$   $R - R_0 > 0$

6. Napisać równość (12.3), jeżeli wewnętrzna produkcja entropii  $\rho R$  określona jest relacją  $\rho R = \rho R_0(1 - \omega)$ , przy czym  $0 < \omega < 1$  jest funkcją monotonicznie rosnącą.

7. Podać podstawowe niezmienniki tensora uszkodzeń  $\varphi_{ij}$  określonego równaniem (17.1).

8. Podać postać tensora mikrouszkodzeń  $\varphi_{ij}$ , kiedy współrzędne wektora rozwarcia  $a_k^\alpha$  oraz normalnej  $n_j^\alpha$  do powierzchni mikropęknięcia spełniają warunki: a)  $j = k$ , b)  $j \neq k$ . Podać interpretacje obu przypadków.

9. Podać współrzędne tensora mikrouszkodzeń  $\varphi_{ij}$  w przypadku płaskim, tj. kiedy  $i = k = 1, 2$ .